

1. DOMÁCÍ ÚKOL, SÉRIE Č. 1

Úkol 1 (3 body). Napište co nejpodrobnější návod popisující algoritmus násobení velkých čísel pod sebou (tak jak se učí na základní škole). Postup rozdělte do jednotlivých kroků a pište ho tak, aby podle něj dokázal postupovat i člověk, který umí pouze násobit, sčítat a odčítat jednociferná čísla.

Definice. *Logistická posloupnost.* Je-li $x \in \mathbb{R}$, $k \in [0, +\infty)$ pak logistickou posloupností s parametrem k a počátečním stavem x rozumíme následující rekurzivně definovanou posloupnost reálných čísel:

- (i) $a_0 = x$
- (ii) $a_{n+1} = k \cdot a_n \cdot (1 - a_n)$

Úkol 2 (2 body). Dokažte, že pro $k > 1$, a $x < 0$ nebo $x > 1$ je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

Úkol 3 (3 body). Napište program, který se uživatele zeptá na x , k a n a následně vypíše prvních n členů logistické posloupnosti s parametrem k a počátečním stavem x . Analyzujte chování logistické posloupnosti pro nějaké x z intervalu $(0, 1)$ a pro následující hodnoty k :

- (i) $k \in [0, 1]$
- (ii) $k \in (1, 3]$
- (iii) $k \in (3, 1 + \sqrt{6}]$
- (iv) $k \in (3.54, 3.57)$
- (v) $k \in (3.57, 4)$

K analýzám chaotického chování se občas hodí statistické metody. Připomeňme si nyní pár definic.

Definice. Je-li $A = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$ posloupnost reálných čísel, pak její *průměr* je definován

$$\text{avg}(A) = \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n + 1},$$

průměrná absolutní odchylka je definována jako průměr posloupnosti

$$A' = \langle |a_0 - \text{avg}(A)|, \dots, |a_n - \text{avg}(A)| \rangle$$

a její směrodatná odchylka je definována:

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n (a_i - \text{avg}(A))^2}{n + 1}}.$$

Spočítáme-li například, že průměrný Čech měří 180 cm, neznamená to ještě, že většina čechů má 180 výškových cm. Pokud by u nás například žili pouze obrři měřící 220 cm a trpaslíci měřící 140 cm, pak by průměrná velikost mohla klidně být 180 cm. Průměrná absolutní odchylka (resp. směrodatná odchylka) je měřítkem toho, jak moc se běžný čech liší od průměrného čecha. Pokud je tato odchylka malá, pak většina čechů bude měřit zhruba těch 180 cm. Pokud bychom naopak byli zemí trpaslíků a obrů, pak bychom měli tuto odchylku velkou.

Úkol 4 (5 bodů). Upravte program z předchozího úkolu tak, aby vypsal průměr, průměrnou absolutní odchylku a směrodatnou odchylku logistické posloupnosti délky n s počátečním stavem x a parametrem k .

HINT 1: Na začátek programu přidejte řádek:

```
from math import sqrt
```

Pak můžete používat funkci `sqrt(x)`, která vrátí odmocninu x .

E-mail address: jonathan.verner@ff.cuni.cz