

Teorie her jako formální teorie racionálního rozhodování

Michal Peliš*

Moderní společnost je spjatá s potřebou koordinace aktivit velkého množství často odlišných subjektů. Její osou se staly formální organizace a její fungování má podobu formální racionality. Aktéři (skupiny i jednotlivci), kteří se v rámci moderní společnosti dostávají do formálních vztahů, tak mohou být modelováni jako racionální hráči určitých her.

V následujícím textu se seznámíme s reprezentací racionálních aktérů pomocí modelů, jež mají svůj původ v ekonomické teorii. Seznámíme se s úplnými základy dnes již mohutně rozvinuté teorie her. I když je text jednoduchý, snažili jsme se nevyhýbat se matematickým pojmům. Proto věříme, že bude možné použít následující řádky i jako úvod do studia matematické teorie her.

Racionální jednání a rozhodování

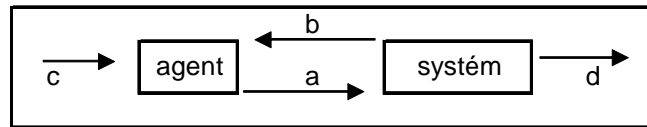
Graham Romp ve své učebnici teorie her začíná větou

„Teorie her se zabývá rozhodováním racionálních jedinců, kteří jsou v nějakém vzájemném vztahu.“ [Romp 1997: 1]

Pojďme si na úplném počátku říci, jak je možné rozumět termínům *racionální jednání* a *racionální rozhodování* v té nejjobecnější rovině. Racionální jednání zde přesně odpovídá Paretovu termínu *logické jednání*, kde jednající předem promýšlí adekvátní prostředky k dosažení cíle. V této souvislosti hovoří Pareto o vědomém propojení prostředků a cílů, kdy prostředky vedou k cíli nejen subjektivně, ale i objektivně. [Keller 2004: kap. 8.5.1]

Při pohledu na jednoho *jednajícího* si lze vypůjčit tzv. „kybernetický“ model (obr. 1), kde je *agent* právě oním racionálním subjektem (jednajícím, aktérem), který provádí zpracování informace a rozhodnutí, a *systém*, jenž je chápán velmi široce jako „okolí“ agenta. Systém má nějaké stavy (b), jimiž působí na rozhodnutí agenta. Jednání (a) agenta je směřováno k systému, v jehož rámci mohou být další agenti. Do schématu jsme naznačili i „jiné“ vlivy (c) na rozhodnutí agenta a pro agenta neznámé výstupy systému (d). [Kvasnička a Pospíchal 2005: 139]

* Text byl zpracován s podporou grantu GA ČR 401/03/H047. Za rady a pomoc děkuji Petru Jirků a Jiřímu Šubrtovi.



Obrázek 1

Je zřejmé, že žádný model racionálního jednání se nevyhne určitému zjednodušení. Přejděme teď k tomu, co to je model racionálního rozhodování, a jaké požadavky na něj klademe.

Modely racionálního rozhodování

Modelů racionálního rozhodování existuje značné množství. Vždy se jedná o modely založené na aplikaci formálních věd. Mezi ty, které využívají především formální logiku, by patřily různé druhy analýz usuzování (usuzování za neúplné informace, nemonotónní usuzování, logika defaultů, epistemické logiky apod.).

My se však soustředíme na *teorii her*. Jde sice o aplikovanou matematickou disciplínu, ale její uplatnění se zdá pronikat téměř všemi humanitními vědami. Vyjdeme-li z obrázku 1, dívá se teorie her na agenta jako na *hráče*, který umí posoudit důsledky své volby (tahu) v podobě nějaké hodnoty (*výhry*). Volby, které jsou agentovi k dispozici, jsou jeho herními *strategiemi* a on je schopen (racionálně) posuzovat výhry a vytvořit si preferenční vztahy mezi strategiemi. Za základní otázku teorie her bychom pak mohli použít formulaci pocházející od Johna von Neumanna z roku 1926 [Kuhn 2003: 2]:

Hraje-li n hráčů hru H , jak má hrát konkrétní hráč i , aby dosáhl pro sebe nejvýhodnějšího výsledku?

Protože jsme výsledek hry pro konkrétního hráče definovali jako jeho výhru (hodnotu výhry), skrývá se ona racionalita hráče v jeho snaze maximalizovat zisk v hodnotě výhry. O tuto maximalizaci se snaží každý hráč, proto se někdy o hrách hovoří jako o *konfliktních situacích*.

Primárními předpoklady teorie her se tak stávají *individualismus*, *racionalita* a *vzájemná závislost* aktérů. [Romp 1997: 1–4] Individualismus tu nesmí být zaměňován s izolacionismem, což je zřejmé, když si uvědomíme, že je zde zmíněná vzájemná závislost, kdy jednání aktérů ovlivňuje ostatní jednající, i když třeba jen tím, jaká je výše výhry. Na druhé straně, i v případech, kdy se pracuje s možnou dohodou dvou a více aktérů, považujeme každého hráče za jednotku, která jedná v duchu vlastního zájmu. V tomto smyslu se neberou

do úvahy skryté (např. altruistické) motivy jednání. U kooperativních situací se tedy nevytváří koalice na základě skrytých preferencí, ale s cílem maximalizovat zisk, resp. minimalizovat ztráty.

Racionální aktér jedná ve svém vlastním zájmu. Zde by se hodil termín *instrumentální racionalita*, což je právě ona schopnost jednat na základě posouzení důsledků své volby a preferencí mezi těmito důsledky. Je asi zřetelné, že naše snaha o zjednodušení lidského jednání obsahuje v tomto druhu racionality souhrn prostředků i cílů. (Viz opět Paretovo pojetí logického jednání v [Keller 2004].) Čemu se tak rozhodně vyhýbáme, je složitý sociálně-psychologický komplex motivací k jednání. Přímo z ekonomického prostředí pochází jedno z ospravedlnění tohoto pojetí racionality. Z vnějšího pohledu, zbaveného ohledu na skryté motivace jednání, je důležitý pouze *výsledek* jednání, důležitý je faktický dopad na ostatní účastníky hry.

Počátky teorie her

Bez nadsázky by se dalo říci, že hazardní hry stály v pozadí rozvoje matematické pravděpodobnosti v 17. století (Blaise Pascal, Pierre Fermat). Na druhé straně se mohutný rozvoj matematických metod zasloužil o to, že se matematika stala plodnou oblastí i při studiu deskových her (šachy, dáma apod.). Již na počátku 20. století se někteří významní matematikové věnovali hledání optimálních postupů (strategií), tj. takových postupů, které maximalizují zisk, resp. minimalizují ztráty. Za první matematiky, kteří do této oblasti vstoupili, by asi byli považováni zejména Emile Borel a dále i Ernst Zermelo a Hugo Steinhouse. Tím, kdo by však mohl být prohlášen za prvního teoretika na poli ekonomie a matematické teorie her, je Antoine Augustin Cournot (1801–1877). Ve svém textu (1838) se zabýval jednorázovým soutěžením dvou firem na trhu a poskytl řešení v podobě rovnovážných strategií. [Romp 1997: 59–64] [2]

I v šachu by teoreticky bylo možné sestavit konečnou tabulku (matici) strategií pro oba hráče. Složitost hry však tkví v tom, že je těchto strategií příliš mnoho. Původem maďarský matematik působící od 30. let v Princetonu John von Neumann (1903–1957) se již ve 20. letech 20. století věnoval hledání optimálních strategií pro hry, které lze zaznamenat právě takovou tabulkou.

Za počátek aplikací teorie her v sociálních vědách bývá považována kniha von Neumanna a Oskara Morgensterna¹ *Theory of Games and Economic Behavior* [1944], která shrnuje a doplňuje tehdejší výsledky v teorii her a upozorňuje na příbuznost analýz konfliktních situací v ekonomii a analýz strategických her. Touto obsáhlou prací se matematická teorie her prvně objevuje jako samostatná disciplína aplikované matematiky. Podle von Neumanna a Morgensterna si neklade za cíl predikovat, jakým výsledkem skončí určitá situace, ale nabízí její analýzu s případnou možností nalezení optimální strategie. Přes mnohá zjednodušení, která jsme již zmínili, má teorie her, podle obou autorů, i ve své formální podobě mnoho společného se skutečným životem. Také v běžném životě zjišťujeme údaje o tom, co lze získat nebo ztratit, jaká jsou pravidla pro aktéry určitých situací a za jakých podmínek do nich můžeme vstupovat. Teorie her tak pomáhá pochopit termíny jako jsou *užitek* a *zájem*. Analýza možností při rozhodování, kde se berou do úvahy vlastní i spoluhráčovy tahy, umožňuje znázornit různé konfliktní a kooperativní situace. Významným prvkem, s nímž teorie her také pracuje, je rozhodování za určitého stupně informace, což je opět rys běžného každodenního rozhodování.

Základní pojmy teorie her

Na úvod zmiňme, co považujeme za obecné předpoklady teorie her.

1. Hráči jsou racionální.
2. Všichni účastníci hry znají pravidla a ta se v průběhu jedné hry nemění.
3. Hráči mají přehled o hodnotách ve hře a znají výši zisků a ztrát.

Když vyslovíme slovo *hra*, většinou nás asi napadne některá z deskových her. Ty jsou nám známy zejména jako posloupnost tahů, kdy má každý hráč určitou informaci o stavu hry v jejím průběhu. Existují samozřejmě i „jednotahové“ hry, ale, jak bude později zmíněno, i u nich nás může zajímat např. opakování, které umožní sledovat reakce protihráčů. Zkoumáním her v této podobě se zabývá *dynamická teorie her*. [Romp 1997: kap. 3]

My se teď podíváme na hry pohledem *statické teorie*. Abychom si objasnili některé základní termíny, zavedeme si obecný model – *hru v normálním tvaru*.

¹ Oskar Morgenstern (1902–1977) ekonom působící ve Vídni a později v Princetonu.

Definice 1 Hrou v normálním tvaru budeme rozumět trojici množin

$\{\{1,2,\dots,n\},\{S_1,\dots,S_n\},\{Z_1,\dots,Z_n\}\}$, kde

$\{1,2,\dots,n\}$ je množina hráčů,

$\{S_1,\dots,S_n\}$ je množina prostorů strategií a

$\{Z_1,\dots,Z_n\}$ je množina výplatních funkcí hráčů.

Jednotliví hráči jsou očíslováni přirozenými čísly; pro model je totiž podstatné hráče odlišit a znát jejich počet. Rozhodně platí, že máme alespoň dva hráče. Každému hráči i náleží strategie obsažené v příslušném S_i . Strategie je úplný popis jak odehrát hru a každému hráči poskytuje představu o návaznosti na kroky jeho spoluhráčů. Při hraní hry v normálním tvaru si každý hráč zvolí určitou strategii $x_i \in S_i$ a sada všech zvolených strategií (všech hráčů) dává příslušnou hodnotu výplatní funkce $Z_i(x_1,\dots,x_n)$ pro hráče i .² Všichni hráči znají strategie své i svých spoluhráčů a znají všechny hodnoty výplatních funkcí. Hra se hraje tak, že každý hráč si zvolí strategii nezávisle na ostatních a všechny volby hráčů jsou zveřejněny současně. Příkladem může být známá hra *kámen-nůžky-papír*.

Příklad 1 (*kámen-nůžky-papír*) Hru hrají dva hráči a oba mají stejný prostor strategií – mohou volit K (kámen), N (nůžky) nebo P (papír). Výplatní funkce lze zaznamenat do tabulky (matice):

		2. hráč		
		K	N	P
1. hráč	K	0	1	-1
	N	-1	0	1
	P	1	-1	0

V tabulce jsou vypsány pouze hodnoty výplatní funkce 1. hráče. Jde o hru s nulovým součtem, což v tomto případě znamená $Z_1(x,y) = -Z_2(x,y)$, kde x je volba 1. hráče, y volba 2. hráče a $x,y \in \{K,N,P\}$. Ten, kdo vyhraje podle pravidel hry (tj. volí K a protihráč N), získá 1 (jednotek), prohraje-li, odevzdá 1 (jednotek) druhému hráči. Při remíze jsou výplaty nulové.

² Výplatní funkce jsou definovány na kartézském součinu prostoru strategií $S_1 \times \dots \times S_n$.

Bez ohledu na konkrétní způsob reprezentace můžeme ještě rozlišovat hry podle následujících kritérií:

Počet hráčů Bývá zvykem předpokládat, že na hře participují alespoň dva účastníci. Obvykle se hovoří o hrách s konečným počtem hráčů.

Racionalita hráčů U účastníků hry lze rozlišovat dvě krajní pozice. Na jedné straně je tzv. „inteligentní“ hráč, který se chová v duchu racionality, jak jsme ji dříve zmínili, a na straně druhé je „hráč“, který své tahy volí náhodně, chová se jako náhodný mechanismus.³

Strategie Hry s *konečnými* a *nekonečnými* strategiemi. Hra *kámen-nůžky-papír* je hrou s konečnými strategiemi. Pokud by hráč volil např. reálné číslo z nějakého intervalu, šlo by o hru s nekonečnou strategií. Sem patří hry, kde se ve strategiích objevuje volba časového bodu („správné načasování“).

Výhra Hry s *konstantním* a *nekonstantním* součtem. Pro hry s konstantním součtem platí, že pro každou volbu strategií všech hráčů⁴ je součet výplatních funkcí všech hráčů

$$\text{konstantní: } \sum_1^n Z_i(x_1, \dots, x_n) = k.$$

Spolupráce Hry *kooperativní* a *nekooperativní*. U nekooperativních her se předpokládá, že hráči nemohou vytvářet koalice ani si nějak doplňovat informace o hře domluvou. Může zde existovat překážka v komunikaci daná charakterem prostředí, v němž se hra odehrává, nebo to může být přímo zakázáno (předpis, zákon).

Počet tahů V tomto případě lze rozlišit hry *strategické*, které jsou reprezentovány např. ve zmíněném normálním tvaru a pomocí matice výplat, a hry *tahové*, jež bývají reprezentovány grafem ve tvaru stromu. Obě reprezentace lze kombinovat např. v závislosti na dostupnosti informace.

Hra *kámen-nůžky-papír*, jak jsme si ji představili v příkladě 1, je konečná, strategická, nekooperativní hra dvou (racionálních) hráčů s konstantním součtem $(Z_1(x,y) + Z_2(x,y) = k$,

³ Právě v případě, kdy máme racionálního hráče, hodí se označení *agent*. Pro náhodný mechanismus se někdy používá označení *příroda* nebo *prostředí*. Pokud proti sobě stojí *příroda* a (racionální) *agent*, říká se, že jde o *rozhodovací situaci*.

⁴ To znamená: pro každou volbu vektoru strategií (x_1, \dots, x_n) .

kde $k = 0$).⁵ U her s konstantním součtem, kde $k \neq 0$, můžeme k považovat za jistý „vklad“ do hry, který však nemá pro teoretické úvahy nad těmito hrami žádný zvláštní význam a lze zde využít analýzy her s nulovým součtem.

Optimální řešení

Na studium her bychom se mohli dívat ze dvou hledisek. *Normativní* hledisko se zabývá nejvýhodnějším jednáním v dané hře. *Deskriptivní* hledisko se zaměřuje na chování konkrétních hráčů. Je pochopitelné, že matematicky orientovaná teorie her se soustředí na hledisko normativní. Jejím zájmem je hledání odpovědí na výše uvedenou základní otázku teorie her. Do centra zájmu se tak dostává výplatní funkce. Ta dokáže nejen znázornit uspořádání (*preference*) výher a proher, ale navíc i ukazuje *o kolik* je něco výhodnější, resp. nevýhodnější. Několikrát jsme již řekli, že racionální hráči budou posuzovat zejména toto hledisko. Na následujícím příkladě velmi jednoduché jednotahové hry si ukážeme, jak budou postupovat racionální hráči při hledání pro ně nejlepšího řešení.

Příklad 2 Mějme dva hráče. Každý z nich má dvě karty, 1. hráč má $\clubsuit 5$ a $\heartsuit 2$ a 2. hráč má $\clubsuit 5$ a $\heartsuit 3$. Na povel musí oba hráči ukázat jednu z karet. Dojde-li ke shodě v „barvě“, dostane 1. hráč (od druhého) absolutní hodnotu z rozdílu hodnot ukázaných karet. Pokud se ukázané karty liší, tak ten, kdo měl vyšší hodnotu, dostane součet hodnot ukázaných karet. [Chobot a Turnovcová 1980: 37]

Jde opět o nekooperativní hru dvou hráčů s nulovým součtem. Hodnoty výplatní funkce jsou v následující tabulce:

		2. hráč		
		$\clubsuit 5$	$\heartsuit 3$	
1. hráč	$\clubsuit 5$	0	8	(a)
	$\heartsuit 2$	-7	1	(b)
		(c)	(d)	

Jak hrát tuto hru, abychom získali co nejvíce a současně se co nejméně poškodili při tahu protivníka? Z pozice 1. hráče je zcela nevýhodný spodní řádek (b). Při libovolné volbě 2.

⁵ Zde bychom mohli použít termín *antagonistický konflikt* dvou hráčů. Každá hra dvou hráčů s konstantním součtem je z principu nekooperativní.

hráče je vyšší zisk na horním řádku (a) – říkáme, že (b) je *dominován* řádkem (a). To znamená, že v pozici prvního hráče je třeba volit strategii ♣5. Pro 2. hráče je zcela nevýhodné volit sloupec (d), vždy přijde o 8 nebo 1 (jednotek). Sloupec (d) je dominován sloupcem (c). Druhý hráč bude volit strategii ♣5. Pro oba hráče jsme takto získali „nejlepší“ volby strategií, aby v rámci pravidel hry a s ohledem na volby protihráče získali „co nejvíce“ a ztratili „co nejméně“. Těmito úvahami jsme našli *optimální strategii*, což znamená, že pokud se kterýkoli z hráčů od této své strategie odchýlí, může ztratit. Optimální strategie určily na matici výplat tzv. *sedlový bod*.

Formálněji řečeno, sedlový bod v matici výplat určuje strategie x_0 (1. hráče) a y_0 (2. hráče) tak, že pokud si 1. hráč zvolí libovolnou strategii x , ale 2. hráč se drží optima, 1. hráč si nepolepší, tj. $Z_1(x, y_0) \leq Z_1(x_0, y_0)$. Obdobně to platí pro 2. hráče. Ve výplatních funkcích 1. hráče to znamená, že odchylka 2. hráče od strategie y_0 může přilepšit 1. hráči, $Z_1(x_0, y_0) \leq Z_1(x_0, y)$. O hodnotě výplatní funkce $Z_1(x_0, y_0)$ se hovoří jako o *ceně hry*. Optimální strategie x_0, y_0 jsou označovány termínem *Nashova rovnováha*, podle jména amerického matematika Johna Nashe.⁶

V příkladě 2 jsme snadno „odřezali“ dominované strategie. Obecně však tento postup nemusí fungovat, protože sedlových bodů může být na matici výplat více, a dokonce tam nemusí být žádný. Když se podíváme na matici výplat hry *kámen-nůžky-papír*, zjistíme, že nemá žádný sedlový bod, a tedy ani Nashovu rovnováhu mezi svými strategiemi.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Optimální řešení však existuje. Představme si, že hru *kámen-nůžky-papír* hraje mnohokrát za sebou. Kdybychom si z nějakého důvodu oblíbili např. strategii „kámen“ (K), tak si toho náš (racionální) protihráč všimne a využije toho k vlastní výhře. Otázku, kterou si tedy každý racionální hráč položí, zní:

S jakou pravděpodobností mám hrát své strategie, abych nepomohl soupeři k výhře tím, že pro něj bude výhodné hrát některou svou strategii?

Zde je na první pohled jasné, že každá ze strategií této hry by měla být volena stejně často, resp. se stejnou pravděpodobností. Každý hráč volí strategii K s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ a se stejnou pravděpodobností i strategie ostatní (N a P). Teď již neuvažujeme *ryzí* strategie (K,

⁶ John Forbes Nash, Jr. (narozen 1928), viz též dále v textu.

N, P), ale tzv. strategie *smíšené*, což jsou vektory pravděpodobností volby příslušné ryzí strategie.

Obecně, a opět trochu formálněji, má 1. hráč k dispozici množinu smíšených strategií

$$S_1 = \{ \mathbf{x} = \langle P_1(K), P_1(N), P_1(P) \rangle : \text{kde } P_1(\dots) \text{ je pravděpodobnost volby příslušné strategie 1. hráčem a } P_1(K) + P_1(N) + P_1(P) = 1 \}$$

a 2. hráč

$$S_2 = \{ \mathbf{y} = \langle P_2(K), P_2(N), P_2(P) \rangle : \text{kde } P_2(\dots) \text{ je pravděpodobnost volby příslušné strategie 2. hráčem a } P_2(K) + P_2(N) + P_2(P) = 1 \}.$$
⁷

U hry *kámen-nůžky-papír* jsme se omezili na vektory $\mathbf{x} = \langle 1/3, 1/3, 1/3 \rangle$ pro 1. hráče a $\mathbf{y} = \langle 1/3, 1/3, 1/3 \rangle$ pro 2. hráče, protože taková volba pravděpodobností hraní ryzích strategií zaručí, že protihráč nemá k dispozici jednoznačně výhodnou volbu své ryzí strategie. Naši neformální úvahu bychom mohli formalizovat následujícím způsobem. Sledujme usuzování třeba 2. hráče:

Bude-li 1. hráč volit strategii K, vyhraje hodnotu $z_1(K)$, což je výplata daná jako vážený průměr

$$z_1(K) = P_2(K) \cdot 0 + P_2(N) \cdot 1 + P_2(P) \cdot (-1)$$

a z toho je $z_1(K) = P_2(N) - P_2(P)$. Obdobně dopočítáme výplatní funkci z_1 pro zbývající strategie.

$$z_1(N) = P_2(P) - P_2(K)$$

$$z_1(P) = P_2(K) - P_2(N)$$

2. hráč teď musí volit takovou pravděpodobnost hraní svých strategií, aby neumožnil 1. hráči jednoznačnou volbu některé ryzí strategie. To znamená, že všechny výplaty 1. hráče musí být stejné, tj.

$$z_1(K) = z_1(N) = z_1(P).$$

Z toho již dostaneme, že $P_2(K) = P_2(N) = P_2(P)$, a protože je současně $P_2(K) + P_2(N) + P_2(P) = 1$, máme $P_2(K) = P_2(N) = P_2(P) = 1/3$.

Stejný úsudek učiní i 1. hráč a v této hře dojde ke stejnému závěru, že bude hrát každou svou strategii s pravděpodobností $1/3$. Hodí se dodat, že kdyby byla matice výplat jiná, bylo by třeba vhodnější volit jiné rozložení pravděpodobnosti pro strategie K, N a P u každého z hráčů, ale úvahy by byly analogické.

U námi zkoumaných her (dvou hráčů s konstantním součtem) platí věta, že *existuje alespoň jedna Nashova rovnováha*.⁸ První impuls ke zkoumání rovnovážných bodů pomocí

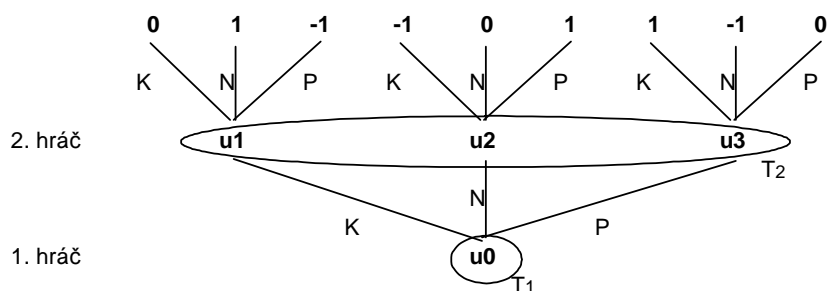
⁷ Takto upravená hra je *smíšeným rozšířením* původní hry. Poznamenejme, že ryzí strategie jsou součástí strategií smíšených. Byla-li by volena např. ryzí strategie K, šlo by o vektor $\langle 1, 0, 0 \rangle$, tzn. hráč bude s jistotou (s pravděpodobností 1) volit strategii K.

smíšených strategií a důkaz věty pochází od von Neumanna [1928].⁹ Normativní pohled na teorii her je právě hledáním takových optimálních řešení. Již jsme řekli, že termín *Nashova rovnováha* nese jméno matematika Johna Nashe. Jeho mimořádný příspěvek k teorii her pochází z roku 1951, kdy v článku *Non-Cooperative Games* zavedl pojem *rovnovážného bodu* a dokázal zobecnění uvedené věty pro všechny konečné nekooperativní hry. [Kuhn a Nasar 2002: kap. 7]

Pro variantu nekonečné nekooperativní hry dvou hráčů není znám univerzální postup k nalezení optimálního řešení. Dokonce je dokázáno, že optimální řešení nemusí existovat. Dá se však najít pro některé typy výplatních funkcí. [Chobot a Turnovcová 1980: kap. 3.4]

Hry a informace

Jak bylo zmíněno, většina deskových her je spíše chápána jako posloupnost tahů střídajících se hráčů. Každý hráč tak provádí rozhodování vázané na určitý stav hry. Ke znázornění takových her je přirozenější použít stromovou strukturu, kde z každého uzlu vychází tolik hran, kolik je možných voleb hráče jenž je právě na tahu. Na obrázku 2 je strom pro hru *kámen-nůžky-papír*. Jistou výhodou takového znázornění je to, že jsme schopni zachytit stupeň informace hráče před volbou tahu. Každému hráči je totiž přiřazena určitá informace charakterizovaná systémem *informačních množin*.



Obrázek 2

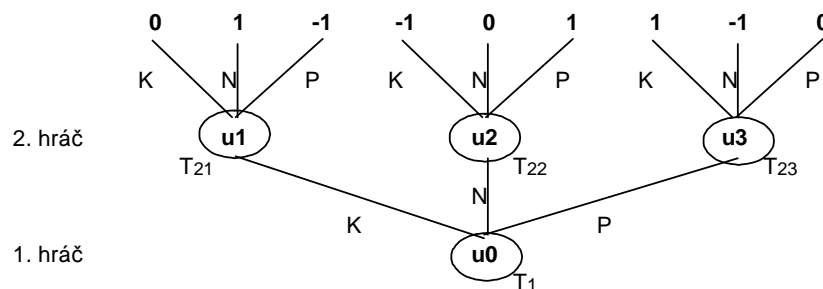
V tomto jednoduchém případě mají oba hráči po jedné informační množině. První hráč má $T_1 = \{u_0\}$ a druhému hráči jsme stanovili jako informační množinu $T_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$, čímž jsme

⁸ Důkazy a vlastnosti rovnovážných bodů (vyhovujících Nashově rovnováze) a jiné možnosti řešení si je možno přečíst v [Chobot a Turnovcová 1980], [Kuhn 2003], [Maňas 1974 a 2002], [Romp 1997] a v dalších publikacích. O vyslovené větě se hovoří jako o *základní větě maticových her* nebo o *min-max teorému*.

⁹ Historický přehled souvisejících prací a různých důkazů variant výše zmíněné věty je v [Kuhn 2003: 48–49].

zajistili to, že neví, do jakého uzlu ho volba prvního hráče dostala. Hra má tak stejnou podobu jako ve skutečnosti při souběžném rozhodování.

Na obrázku 3 je situace, kdy má každý účastník hry všechny své informační množiny jednoprvkové. Jde o hru s *dokonalou informací*. V tomto případě to znamená, že druhý hráč rozlišuje informační množiny T_{21} , T_{22} , T_{23} a ví, kde se hra nalézá po tahu prvního hráče. Taková varianta hry *kámen-nůžky-papír* by však pro 1. hráče příliš zábavná nebyla.¹⁰



Obrázek 3

Reprezentace her stromovou strukturou (*hra v explicitním tvaru*) je vhodná k modelování situací, kdy je možné získat lepší informaci pomocí nějaké investice. Příkladem může být výroba, která dostává různě kvalitní suroviny, a ty pak ovlivňují kvalitu výrobků a jejich cenu. Investováním do vstupní kontroly se změní informační množiny a celková bilance se může zlepšit. [Chobot a Turnovcová 1980: kap. 4.9] Jiným příkladem jsou obdobné úvahy nad investicemi do „špionáže“.

Neformálně jsme naznačili, jak převést hru v normálním tvaru na hru v explicitním tvaru. Platí však i tvrzení opačné, že *každou hru v explicitním tvaru lze převést na hru v normálním tvaru*. Důkaz lze najít např. v [Chobot a Turnovcová 1980: kap. 4]. Díky tomu, že hra v explicitním tvaru obsahuje dodatečnou informaci, má sama k sobě vždy právě jednu hru reprezentovanou normálním tvarem, ale ke hře v normálním tvaru existuje více her ve tvaru explicitním. [Romp 1997: 12]

V běžném životě není vždy možné, aby si hráči byli schopni dokonale propočítat zisky a ztráty, a pak jen uvažovali nad volbou strategií. V takovém případě by mohlo být řešením to, že se hra odehrává opakovaně (skutečně nebo fiktivně) a hráči sledují volby protivníka. Optimalizace pak vychází z průměrného výnosu. Tato metoda však není použitelná u všech

¹⁰ Na druhé straně poznamenejme, že šachy jsou také hrou s dokonalou informací.

her a dokazování konvergence odhadů strategií je v teorii her považováno za velmi obtížnou část. [Mañas 2002: kap. 2.6]

Individuální a skupinová racionalita

Na začátku tohoto textu jsme pracovali s antagonistickým konfliktem dvou aktérů, tj. pracovali jsme s nekooperativní hrou dvou hráčů s nulovým součtem. Zmínili jsme též, že hry s nulovým součtem lze použít pro analýzu her s konstantním součtem. Ve společenských vědách se však často setkáváme s jednáním, které nemusí mít charakter hry s konstantním součtem. Snad nejznámějším příkladem je tzv. „věžňovo dilema“. Jde asi o nejčastěji diskutovaný příklad v textech o teorii her.

Příklad 3 (věžňovo dilema) Při vyšetřování závažného zločinu jsou uvězněni dva vážně podezřelí. Protože jsou důkazy neúplné a oběma lze prokázat jen např. krádež auta, které bylo ke spáchání zločinu použito, dostanou oba podezřelí (nezávisle) následující nabídku. Pokud se podezřelý přizná a tím umožní usvědčit svého komplice (tj. druhého podezřelého), bude mu trest významně snížen či dokonce prominut. Možnosti jsou uvedeny v tabulce, kde dvojice $\langle a, b \rangle$ znamená počet let, která stráví ve vězení 1. podezřelý (a) a 2. podezřelý (b).

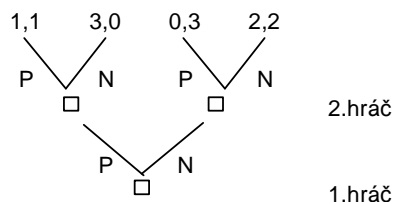
		2. podezřelý	
		přiznání (P)	nepřiznání (N)
1. podezřelý	přiznání (P)	$\langle 6, 6 \rangle$	$\langle 0, 10 \rangle$
	nepřiznání (N)	$\langle 10, 0 \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle$

Věžňovo dilema je nekooperativní hra dvou hráčů s nekonstantním součtem a lze si ji znázornit jako dvoumatici výplatních funkcí; čím méně let, tím větší výhra:

$$\begin{pmatrix} 1,1 & 3,0 \\ 0,3 & 2,2 \end{pmatrix}$$

Použijeme-li znalosti z kapitoly *Optimální řešení*, zjistíme, že pro oba hráče je strategie N dominována strategií P a tato strategie tak tvoří Nashovu rovnováhu. I když by bylo pro oba mnohem výhodnější, kdyby se drželi strategie N. Bod 2,2 sice není rovnovážný, ale byl by jistě preferován každým účastníkem hry, jde o tzv. *paretovské optimum*. *Věžňovo dilema* je

pěknou ilustrací rozdílu ve skupinové a individuální strategii. Podíváme-li se na explicitní vyjádření této hry na obrázku 4, bude vidět, že i v případě, kdy 1. hráč dodržel dohodu nepřiznávat se, je pro 2. hráče výhodnější dohodu porušit.



Obrázek 4

V [Hayes a Wheelwright 1993: 98–101] je hra *vězňovo dilema* použita jako analogie s příkladem firmy, která měří celkový výkon pomocí individuálních výkonů svých složek. Každá složka se tak snaží maximalizovat svůj výkon bez ohledu na celek. Tady je zřejmé, že dohoda mezi zločinci, není-li nějak pojištěna, může být (z racionálních důvodů) porušena. V rámci jedné firmy má však smysl uvažovat o zavedení a dodržování „kooperace“. Používáme zde sice slovo „firma“, ale totéž platí pro jakýkoli kolektiv pracující na společném projektu. Pro „firemní“ prostředí je podstatný i dynamický prvek této hry, protože se situace obvykle několikrát opakuje. Je-li tomu tak, lze uplatnit „strategii odplatou“ (*tit-for-tat strategy*), která obvykle zaručuje dodržování dohody: „Dodržuj dohodu, dokud ji dodržují ostatní. Pokud ji někdo poruší, poruš ji v příštím běhu také.“¹¹ [Romp 1997: 265] [de Bruin 2005] Verze *vězňovo dilematu* se stala již v 50. letech vzorovou hrou pro modelování individuální a skupinové racionality. Později se objevují různé varianty této hry i při studiu dlouhodobého (evolučního) „chování“ strategií v rámci populace. [Kvasnička a Pospíchal 2005: 115–117]

Nekooperativní hry většinou modelují některé typy „soutěžního chování“ dvou a více aktérů. Může jít o souboj firem o zakázky, soupeření politických stran, mezistátní konflikt apod. V předchozích úvahách jsme však naznačili, že je užitečné zabývat se i tvorbou koalic k maximalizaci zisku. Kooperativní teorie her se zabývá právě situacemi, kdy se mohou hráči před volbou strategií domlouvat a vytvořit tak *koalice*, tj. skupiny účastníků, kteří se dohodnou na volbě strategií, aby si zajistili lepší výsledek ve hře. V pravidlech hry mohou být některé koalice zakázány, pak hovoříme o hrách s *omezenou koaliční strukturou*. Lze klást

¹¹ Na počátku 80. let vyzval Robert Axelrod zájemce o teorii her, aby zpracovali počítačový program pro nejlepší odehrání opakované hry *vězňovo dilema*. Právě program od Anatola Rapoporty založený na této strategii byl nejuspěšnější.

omezení i na členství hráče v koaliciích, např. je možno být členem pouze jedné koalice (*disjunktní koaliční struktura*). To je celkem pochopitelný požadavek, když si uvědomíme, že každý hráč je zavázán plnit dohodu své koalice.

Při charakterizaci kooperativních her je vhodné dodat, na čem se mohou jednotliví hráči v koalici domlouvat. Samozřejmostí je dohoda nad volbou strategií, ale současně může být vhodné spojit tuto dohodu se způsobem, jakým se bude dělit výhra. [Mañas 2002: 56–57]

Představme si kooperativní hru, která nemá omezenou koaliční strukturu a hráči mohou být členy vždy pouze jedné koalice. Při analýze takové hry vyvstávají následující otázky, na něž se snaží kooperativní teorie her nalézt odpovědi:

1. Do které koalice má daný hráč vstoupit?
2. Jakou strategii mají členové konkrétní koalice volit?
3. Jak si mají členové koalice rozdělit celkový zisk?

Teď se již nebudeme pouštět ani do „jednoduchého matematického úvodu“ teorie kooperativních her a přenecháme ho povolanějším autorům a jejich publikacím, zde např. [Chobot a Turnovcová 1980: kap. 6] a [Mañas 2002: kap. 5]. Pouze si dovolíme uvést tzv. *axiomy racionality* pro koaliční hry, které mohou dát určitý návod, jak hledat odpovědi na první a třetí otázku.

Axiom individuální racionality říká, že žádný hráč nebude souhlasit s dohodou, která mu nezajistí alespoň tolik, kolik by získal, kdyby hrál sám.

Axiom paretovské racionality zajišťuje to, že žádný hráč nemůže získat více, aniž by tím současně nepoškodil ostatní.

Axiom koaliční racionality nedovoluje existenci podkoalice, která by svým členům zajistila větší zisky než koalice původní. [Chobot a Turnovcová 1980: 248, 253–255]

Zřejmě první matematickou analýzu kooperativních her lze najít v knize von Neumanna a Morgensterna [1944]. Oba autoři se zabývali analýzou výše uvedeného typu kooperativní hry. Jejich přístup je i v [Chobot a Turnovcová 1980: kap. 6.4 a 6.5].

Příkladem aplikace kooperativní teorie her z ekonomické oblasti je snaha několika firem o dohodu při obsazování trhu. Součástí dohody mohou být i kompenzace těm firmám, které v zájmu koalice utlumí nákladnou výrobu, jež by se promítla do ceny produktu.

Významné postavy teorie her a její další vývoj

Je asi zřejmé, že nástup moderní společnosti s mohutným rozvojem průmyslu a obchodu v rámci globalizovaného trhu měl za následek i rozvoj teorií ekonomického chování. Moderní společnost se stala souborem složitých byrokratických systémů, které vyhovují duchu Weberovy definice formální racionality. První teorie ekonomického chování z druhé poloviny 19. století však neuměly vhodně pracovat s rozhodováním racionálního aktéra. K výrazným změnám došlo až po vydání knihy [von Neumann a Morgenstern 1944] a výsledcích Johna Nasha v 50. letech 20. století.

John Nash byl postgraduálním studentem v Princetonu právě v době, kdy zde působili von Neumann, Morgenstern, Einstein, Gödel a Oppenheimer. K takové koncentraci slavných jmen prý jeden z Einsteinových asistentů poznamenal: „The air is full of mathematical ideas and formulae.“

Morgenstern i von Neumann vyslovili ve své knize přání, aby se teorie her stala při studiu tržních mechanismů tím, čím byl infinitesimální počet pro fyziku. V té době však matematici považovali teorii her za dočasnou a okrajovou libůstku. Vždyť např. v oblasti nekooperativních her nepřinesli von Neumann a Morgenstern nic více než jen analýzu her dvou hráčů s nulovým součtem.

V roce 1950 publikoval John Nash řešení „problému vyjednávání“ (*bargaining problem*), který se po dlouhou dobu zdál být mimo jakýkoli formalismus. [Kuhn a Nasar 2002: kap. 4] V tomto roce se také zrodila myšlenka obecné definice rovnováhy a zobecnění rovnovážného bodu pro velkou třídu her. Nash sepsal disertaci s ještě jiným důkazem, než původně navrhoval, a vyjasnil rozdíl mezi možnostmi analýzy kooperativních a nekooperativních her.¹² Za tyto výsledky získal v roce 1994 Nobelovu cenu, o níž se podělil s dvěma dalšími badateli v oblasti teorie her Johnem Harsanyim a Reinhardem Seltenem.¹³

Nashova práce byla prvním významným krokem k tomu, aby se teorie her stala skutečnou matematickou aplikací použitelnou při modelování určitých typů interakcí. Taková teorie se již více přiblížila racionálním aktérům, kteří nejsou jen zapojeni do běžných tržních mechanismů. Současně se ukázalo, že za teorií her se skrývá i hlubší matematika, což jí

¹² Práce vyšla v roce 1951 a zmínili jsme se o ní na konci kapitoly *Optimální řešení*.

¹³ John Harsanyi (1920–2000) působil na University of California v Berkeley a zabýval se hrami s neúplnou informací (1967). Reinhard Selten (narozen 1930) je profesorem na Rheinische Friedrich-Willhelms-Universität v Bonnu a cenu získal za zjemnění Nashovy rovnováhy pro analýzu dynamických vztahů (1965). [Kuhn a Nasar 2002: 1–3] [3]

pomohlo na výsluní zájmu mezi matematiky.¹⁴ [Kuhn a Nasar 2002: xi–xxv] V 50. letech se objevují první aplikace ve filosofii, politologii a sociologii. Nekooperativní hry byly považovány za vhodný model mezistátních konfliktů na počátku „studené války“.

Jedna z nejnovějších aplikací teorie her mimo ekonomii je z 80. let, kdy se můžeme setkat s dynamickým herně-teoretickým přístupem v evoluční biologii. Evoluční proces se tak jeví jako způsob optimalizace. Zde soupeří samotné strategie, na nichž se hledají rovnovážné stavy. [1] Při soupeření strategií může být podstatné, která strategie v populaci dominuje. Minoritní strategie, která by byla jinak sama úspěšná, je v roli neúspěšné a mizející strategie. [Kvasnička a Pospíchal 2005]

Aplikace teorie her v sociálních vědách

Přestože mnohé aplikace teorie her, a to zejména mimo ekonomii, nevyužívají plně matematický aparát, který je k dispozici, pomáhá znalost teorie her při modelování určitých vztahů. V sociální oblasti je sama teorie her zdrojem nových otázek. Již termín *optimální chování* přináší problém, zda lze pro skupinu jedinců odvodit, co je pro ni optimálním chováním, když víme, jaké preference mají její členové. Prvním úskalím je definice toho, co to znamená *sociálně* (možná lépe: *skupinově*) *optimální*. Následující příklad naznačoval, že ve společnostech s rostoucím liberalismem se skupinové chování bude rozcházet s preferencemi členů skupiny. [de Bruin 2005]

Příklad 4 (*liberální paradox*) Skupina kuřáků je umístěna v malém nevětraném pokoji, v němž platí zákaz kouření. Za této situace preferují všichni nekouřit. Je-li zákaz zrušen a vzroste-li osobní svoboda, budou všichni kouřit, protože je pro ně nepřijatelné nekouřit, když někdo jiný kouří. Tím však ustoupili z toho, co původně preferovali.

Řešením *liberálního paradoxu* by mohla být jeho rozšířená „právně-politická varianta“. Situace z příkladu 4 je doplněna o hlasování, zda povolit či zakázat kouření v situaci neexistence normy. Hlasováním se projeví to, co lze pokládat za skupinovou optimalitu. Jde vlastně o ustavení nových preferencí při změně situací. V institucích a

¹⁴ Sám Nash však později svůj zájem přesunul k čistě matematickým problémům. Pro zajímavost dodejme, že od konce 50. let trpěl velmi silnou formou schizofrenie, která mu bránila v další práci a jež začala ustupovat až na konci 80. let. Jeho osud byl ztvárněn v knize *A Beautiful Mind* a stejnojmenném filmu (v češtině pod názvem *Čistá duše*).

institucionalizovaném chování je možné vidět jakési evoluční hledání cest k optimalizaci jednání ve společenském rámci.

Sociální psychologie využívá teorie her např. k modelům dyadických interakcí. Dva partneři v interakci (hráči) volí určité druhy chování (strategie) ve vztahu ke svému protějšku. Lze tak modelovat závislosti obou aktérů na vztahu a způsoby kontroly chování (výběru strategie) u partnera. Výplatní funkce tu znázorňuje i „příspěvek“ partnerů k interakci. [Nakonečný 2000: 177–187] Do této kategorie patří známá hra nazývaná „souboj pohlaví“ (*Battle of the Sexes*). [Romp 1997: 22]

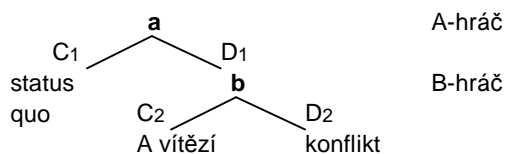
Příklad 5 (*Battle of the Sexes*) Manželská dvojice se rozhoduje, jak stráví večer. Má dvě možnosti: jít na hokejový zápas nebo do divadla. Oba manželé preferují společně strávený večer, ovšem On dává přednost hokeji, zatímco Ona by raději zvolila návštěvu divadla. V tabulce ve tvaru dvoumatice jsou zaznamenány preference manželů v podobě výplat (uspokojení ze zvolené činnosti):

		On	
		hokej	divadlo
Ona	hokej	2,3	0,0
	divadlo	1,1	3,2

U této hry bychom Nashovu rovnováhu hledali mezi smíšenými strategiemi. Psycholog by asi doporučil pravidelné střídání uvedených aktivit, aby nedocházelo k pocitu neuspokojení u jednoho z partnerů při nedostatku jím upřednostňované aktivity, což by mohlo mít za následek „odpoutání“ od partnera. Současně tedy můžeme z tabulky vyčíst míru závislosti obou partnerů na vztahu. Uvědomí-li si jeden z nich tuto situaci, může ji využít. Na příklad Ona předem zakoupí lístky do divadla a On pak volí návštěvu divadla v rámci svých preferencí.

Z toho, co jsme dosud řekli, je asi zřejmé, že teorie her bude mít své místo i v politologii. [Říchová 2000] Principy kooperativní teorie her se uplatňují při tvorbě koalic politických stran a významnou aplikací je analýza mezistátních konfliktů. Modely těchto konfliktů se dají využít nejen k analýze vztahů stát–stát, ale obecně pro analýzu vztahu skupina–skupina, tedy např. stát–teroristé. Na obrázku 5 je znázorněn základní model tzv. „asymetrické hrozby“ (*Rudimentary Asymmetric Deterrance Game*), který jsme si vypůjčili z

[Quackenbush a Zagare 2006]. Protože je to hra s po sobě jdoucími dvěma tahy, znázornili jsme ji v explicitním tvaru.



Obrázek 5

Zkusme se na tuto hru podívat jako na vztah státu a teroristů. Teroristé jsou první na tahu, jsou to „vyzyvatelé“ (A-hráči). Mají dvě možnosti buď souhlasit se stavem, který panuje (strategie C_1), nebo zvolit strategii odporu (D_1) jakým je únos letadla, rukojmí, hrozba bombového útoku apod. V případě této volby je na tahu stát (B-hráč), který může přistoupit na požadavky teroristů (C_2) a v tom případě lze považovat A-hráče za vítěze, nebo jejich požadavky odmítne (D_2) a vstupuje do konfliktu. Průběh hry je závislý na hodnotách, které hráči přiřazují příslušným volbám. Je jasné, že z hlediska vztahu teroristé–stát je stav *status quo* velmi nestabilní, protože stávající situace (alespoň z pohledu teroristů) obsahuje podnět k teroristickému útoku. Pokud je např. známo, že stát vyjednává s teroristy, vyhoví jejich požadavkům a pouští se do konfliktu jen v případech, kdy jsou teroristé ve značné nevýhodě, zvyšuje se pravděpodobnost volby D_1 A-hráčem. Obecně platí, že chování státu vždy produkuje hrozby směrem k potenciálním i skutečným teroristům. Hrozba však musí splňovat dvě podmínky, abychom ji mohli považovat za účinnou. První podmínkou je uvěřitelnost hrozby. Stát, který deklaruje, že s teroristy nevyjednává, ale činí pravý opak, nemůže nevyjednávání považovat za uvěřitelnou hrozbu. Druhá podmínka se skrývá v tom, že splnění hrozby povede u A-hráče ke zhoršení jeho současné pozice. Je pěkně vidět, že jednoduchá hra „asymetrické hrozby“ dobře modeluje základní podmínky, které musí B-hráč splnit, aby snížil pravděpodobnost, že A-hráč zvolí D_1 .¹⁵ Chování státu v podobných případech je často rozhodující pro to, zda jsou obě podmínky splněny. Je ovšem jasné, že tato analýza neposkytuje návod na rozhodování v konkrétních situacích teroristického útoku.

¹⁵ V této souvislosti lze zmínit Izrael jako relativně úspěšný stát při produkování hrozeb. Jeho obvyklá mohutná vojenská opatření neodradí sebevražedného atentátníka, ale mohou odradit „vyjednávací“ teroristy.

Kritika teorie her

I z toho mála, co jsme o hrách řekli, je asi tušit, na co budou kritikové teorie her poukazovat. Zdá se, že velkým problémem je zejména předpoklad instrumentální racionality.¹⁶ [Romp 1997: kap. 12] Některá empirická pozorování se rozcházejí s předpověďmi teorie her právě díky tomu, že reálný agent nemusí pracovat s určitou, teoreticky předpokládanou informací. Důvodem může být to, že mu není známa a třeba ji ani neuměl odvodit.

Hru jsme považovali za něco, kde participují racionální hráči a mezi nimi je distribuována určitá znalost o stavu hry. Při volbě strategií je velmi důležité posoudit volby ostatních spoluhráčů. Každá hra tak definuje to, co bychom označili jako *společnou znalost* hráčů (*common knowledge*). Jde o informace, které jsou známy každému hráči a současně každý hráč ví, že je to známo, a každý ví, že každý ví, že je to známo, atd. Předpoklad racionality a společné znalosti v teorii her vynucuje i stejné závěry úsudků hráčů. V reálném životě se zdá být právě toto značně problematické.

S tím souvisí i jistá neurčitost teorie her při predikci výsledků. Naznačuje to již existence více rovnovážných bodů při užití ryzích strategií a interpretace strategií smíšených. Robert Aumann navrhuje, aby se k pravděpodobnostnímu rozložení na prostoru ryzích strategií přistupovalo spíše jako k „subjektivnímu přesvědčení“ o tom, co udělají spoluhráči. [Romp 1997: 266] Toto pojetí se ani nijak nepřiči Harsanyiho doktríně, která říká, že mají-li racionální hráči stejné informace, mají i stejná přesvědčení. Stále však platí námitka, zda je tomu skutečně tak, že hráči si jsou schopni odvodit všechny adekvátní závěry. Je tedy nutné věnovat pozornost zkoumání rozhodování jednotlivců ve složitých situacích a za neúplné informace. V politologickém příkladě vztahu státu a teroristů jsme zdůraznili, že rozhodování o útoku proti státu se odvolává na jednání státu v podobných situacích. Blíže realitě se tak jeví úsudky učiněné na základě opakovaného hraní téže nebo podobných her. Rozhodování agentů i v případě jednorázových her může být vhodné vztáhnout k určité sadě her.

Teorie her umí analyzovat všemožné situace za stanovených podmínek, ale, jak říká Reinhard Selten v [3], „nelze od ní čekat praktické návody pro konkrétní situace, stejně jako nelze dodat praktický návod, jak se stát velmistrem v šachu“.

¹⁶ Na jistou nevýhodu tohoto předpokladu jsme narazili již při analýze hry *věžňovo dilema*, kde se „sobecká“ racionalita ukázala být méně výhodná než kooperace.

Literatura

- de Bruin, B. 2005. „Game Theory in Philosophy.“ *Topoi* 24: 197–208
- Chobot, M., Turnovcová, A. 1980. *Modely rozhodovania v konfliktných situáciách a za neurčitosti*. Bratislava: Alfa.
- Hayes, R.H., Wheelwright, S.C. 1993. *Dynamická výroba*. Praha: Victoria Publishing.
- Jirků, P. 2006. „Hry a lidské rozhodování.“ (preprint, v tisku)
- Keller, J. 2004. *Dějiny klasické sociologie*. Praha: SLON.
- Kuhn, H.W. 2003. *Lectures on the Theory of Games*. Princeton University Press.
- Kuhn, H.W., Nasar, S. (eds.) 2002. *The Essential John Nash*. Princeton University Press.
- Kvasnička, V., Pospíchal, J. 2005. *Informatika pre sociálne vedy*. Bratislava: Univerzita Komenského. Skriptum.
- Mañas, M. 1974. *Teorie her a optimální rozhodování*. Praha: SNTL.
- Mañas, M. 2002. *Teorie her a konflikty zájmů*. Praha: Oeconomica. Skriptum.
- Nakonečný, M. 2000. *Sociální psychologie*. Praha: Academia.
- Quackenbush, S.L., Zagare, F.C. 2006. „A Game-Theoretic Analysis of the War in Kosovo.“ In Jennifer Sterling-Folker (ed.), *Making Sense of IR Theory*. Boulder, CO: Lynne Rienner Publishers, pp. 98-114.
(<http://pluto.fss.buffalo.edu/classes/psc/fczagare/Chapters/Kosovo.pdf>, 29.5.2006)
- Romp, G. 1997. *Game Theory: Introduction and Applications*. Oxford University Press.
- Říchová, B. 2000. *Přehled politologických teorií*. Praha: Portál.
- Turocy, T.L., von Stengel, B. 2001. „Game Theory.“ CDAM Research Report LSE-CDAM-2001-09. (web, 29.5.2006)
- Vlach, M. 1988. *Teorie her*. Praha: SPN.
- von Neumann, J. 1928. „Zur Theorie der Gesellschaftsspiele.“ *Mathematische Annalen*, 100: 295–320.
- von Neumann, J., Morgenstern, O. 1944. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press.

- [1] <http://plato.stanford.edu/entries/game-theory> (29.5.2006)
- [2] http://en.wikipedia.org/wiki/Game_theory (29.5.2006)
- [3] „Jak si hrají ekonomové.“ (rozhovor s R. Seltenem), Magazín DNES, 20.4.1995, str. 42–44.