Logika a matematika: hledání základů

Michal Peliš[*]

25. března 2006

Abstrakt

Text se zabývá vztahem logiky a matematiky při hledání odpovědi na otázku, co jsou základy matematiky. Snažíme se ukázat rozdíl mezi hledáním absolutních základů matematiky, resp. veškerého vědění, a základů, které jsou vázány na konkrétní matematickou praxi v rámci jedné teorie. Logika je představena jako formální systém, v němž lze odhalovat obecné vlastnosti matematických teorií, a je sledován souběžný vývoj logiky a matematiky.

Obsah

[*]Katedra logiky, Filosofická fakulta University Karlovy v Praze, pelis@ff.cuni.cz

1 Úvodem

Moderní logika a matematika by se dnes mohly jevit jako samostatné disciplíny, které nejsou v přímém spojení s ostatními přírodními vědami, a často by se mohlo zdát, že ani logika a matematika se nijak vzájemně nepotřebují. Když se hovoří o matematické nebo logické praxi znamená to vždy studium konkrétních oblastí v rámci matematiky, resp. logiky. Obě disciplíny jsou však založeny na stejných principech.

Matematika bývá považována za "královnu věd" a je samozřejmé, že při hledání základů lidského vědění byla právě na ni upřena pozornost. Hledání základů vědy a vědění se tak přirozeně transformovalo do hledání základů matematiky. Rozvoj formální logiky se zdál naznačovat, že to bude ona, kdo založí bezpečné základy celé "matematické budovy". V následujícím textu (viz zejm. kapitola 2) ukážeme, že původní ambice některých matematiků nemohou být naplněny. Tyto výsledky matematické logiky vyvolaly mnoho různých filosofických interpretací, ve kterých se často ztrácela podstata a hlavní význam pro matematickou praxi.[1] My se zde nepokusíme o další přeříkávání těchto výsledků. Chtěli bychom pouze ukázat, jak má být chápáno slovo *základ*, pokud ho chceme použít v případě formálních systémů, jakými jsou právě konkrétní matematické teorie. Z tohoto pohledu bude pro logiku zachováno význačné postavení rámce pro deduktivní práci ve formálních systémech a budeme k ní přistupovat stejně jako k takovému formálnímu systému.

1.1 Logika

Zcela obecně si můžeme představit, že každá sada výroků tvoří teorii. Chcemeli pracovat v teorii deduktivním způsobem, musíme si stanovit, jak má takové deduktivní usuzování vypadat, a právě to je úkolem logiky v roli formálního systému. Z tohoto pohledu jsou v logice podstatné tři dimenze:

- jazyk
- deduktivní systém
- sémantika

Jazyk Pro každý formální systém je důležité, aby "slova" jazyka byla v jistém smyslu přehledná a tato přehlednost může být často důvodem, proč

[1] Zde jde zejména o různé interpretace Gödelových výsledků ve smyslu omezenosti lidského poznání.

jsou formální jazyky a na nich založené systémy tak vzdáleny jazyku přirozenému. I když jsou dostatečně bohaté na to, aby např. zachytily matematické výroky, nemusí postačovat k dokonalé analýze všech vět běžného jazyka. My se však soustředíme zejména na výroky matematiky a formálním jazykem bude jazyk predikátové logiky.

Základem jazyka (formálního i přirozeného) je *abeceda* – soubor symbolů, které tvoří základní prvky, z nichž se dají vytvářet složitější celky. V logice odlišujeme symboly logické a mimologické.

V případě logických symbolů je předem dáno, jak jim máme rozumět v rámci celého formálního systému (tj. příslušné logiky). Když říkáme, že je logickým symbolům rozuměno jednotným způsobem v rámci daného formálního systému, může to třeba v případě konjunkce ($\wedge$) znamenat to, že když máme (tvrdíme, máme dokázány) výroky A a B (a třeba nějaké další), pak lze říci (přidat k ostatním výrokům) i výrok $A \wedge B$.

Mimologické symboly již určitým způsobem naznačují, "o čem se mluví". Sem patří symboly, které pojmenovávají objekty (konstanty), funkční symboly (funkce na objektech) a predikátové symboly (vlastnosti, vztahy, relace). Soubor mimologických symbolů se často označuje jako *signatura* jazyka.

Zvláštním druhem symbolů jsou proměnné (pro objekty, o nichž se má v rámci formálního systému vypovídat) a symboly pomocné, které mohou sloužit k zachycení struktury výroků (závorky).

Z abecedy tvoříme složitější výrazy pomocí (gramatických) pravidel. Těmito složitějšími výrazy jsou *termy* a *formule*.[2]

Deduktivní systém Formulemi zachycujeme formální stránku výroků a výrokových schemat v příslušném jazyce. Zobrazujeme jejich strukturu pomocí symbolů tohoto jazyka.

Deduktivní systém bychom mohli považovat za vztah mezi dvěma soubory (množinami, posloupnostmi) formulí.[3] V tomto textu mějme tento vztah jako relaci ($\vdash$) mezi souborem formulí (Γ) a formulí (φ), symbolicky $\Gamma \vdash \varphi$. Deduktivní systém pak obsahuje pravidla, která říkají, jak má dedukce v tomto systému vypadat. V případě konjunkce by mohlo být pravidlem: Když odvodíš φ a ψ z Γ, pak odvodíš i $\varphi \wedge \psi$.

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}$$

[2] Přesné definice lze najít v každé základní učebnici matematické logiky.

[3] Protože může v některých systémech záležet na pořadí formulí (posloupnost) a v některých nemusí (množina), budeme používat neutrální termín *soubor*.

Sémantika Jazyk i deduktivní systém je jistým "hraním si" se symboly; jsou zde obsaženy návody, jak vytvářet nějaké výrazy. V případě jazyka a deduktivního systému jde o syntaktickou stránku logiky. K sémantice budeme také přistupovat jako k formálnímu systému, ale jeho role je na *metaúrovni*. Sémantika dává výrazům daného jazyka "význam". Je to třída modelů tohoto jazyka. Logiky se mohou lišit v tom, co je považováno za model, ale základem je obvykle struktura $\mathbf{M}$, která sestává z jedné nebo více tříd (*domén*) a funkce i, která *interpretuje* mimologické symboly.

Struktura – příklad Mějme jako formální systém klasickou predikátovou logiku (prvního řádu) a signaturu jazyka s predikátovým symbolem $\leq$. Objekty, o nichž chceme něco vypovídat, jsou přirozená čísla. Modelem pak může být struktura $\mathbf{N} = \langle N, i(\leq)\rangle$, kde N je množina přirozených čísel $\{0, 1, 2, \ldots\}$ a $i(\leq)$ je klasické (neostré) uspořádání na přirozených číslech.

Podobně, jako v případě deduktivního systému, kde jsme symbolem $\vdash$ zachytili relaci syntaktického důsledku, existuje i na úrovni sémantiky podobná relace – *sémantický důsledek* ($\models$).[4]

Má tedy smysl zabývat se vztahem třídy modelů nějakého souboru formulí a toho, co lze z tohoto souboru dokázat v rámci deduktivního systému.[5] K tomu několik základních fakt:

1. Řekneme, že deduktivní systém je *(silně) korektní* (vůči dané sémantice), jestliže každá dokazatelná formule je i sémantickým důsledkem.

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Longrightarrow \quad \Gamma \models \varphi$$

2. O *(silné) úplnosti* (deduktivního systému vůči dané sémantice) hovoříme v případě, že

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \models \varphi$$

3. Soubor formulí Γ je *sporný*, pokud je z něj dokazatelná libovolná formule. Γ tedy nemůže mít model. Má-li soubor formulí alespoň jeden model, není sporný (za předpokladu korektnosti).

[4] Protože budeme pracovat jen s teoriemi a výroky, bereme do úvahy pouze formule bez volných proměnných (sentence). $\Gamma \models \varphi$ pak znamená, že φ platí v každém modelu, kde platí všechny formule z Γ.

[5] Jak bylo vidět v uvedeném příkladě, vhodným modelem může být i běžná matematická struktura, o níž máme přehled již z dřívějšího studia např. středoškolské matematiky.

4. Soubor sentencí Γ určuje třídu modelů $\mathcal{M}_\Gamma$, v nichž jsou všechny prvky z Γ platné. Nemusí však platit opak. Máme-li třídu modelů $\mathcal{M}$, nemusí k ní existovat soubor Γ, který by ji (přehledně) *axiomatizoval.*

2 Logika a matematika

V tomto oddíle se nebudeme pouštět do historie matematiky. Pouze zdůrazněme, že mohutný rozvoj matematiky je spjat právě se symbolizací a axiomatizací. Logika v tomto ohledu trochu zaostávala. Velmi dlouhou dobu byla ztotožňována se středověkou sylogistikou a Aristotelem. Teprve přelom 18. a 19. století přináší první pokusy o formalizaci a algebraizaci logiky (G. Boole, J. Venn), ale skutečným průkopníkem se stal Gottlob Frege (1848–1925), jenž se pokusil ustanovit základy celé matematiky pomocí formálního systému, který by nebyl vázán na konkrétní matematickou oblast. Oba uvedené kroky byly velmi významné pro rozvoj toho, co dnes označujeme jako *matematická* nebo *formální logika.* Symbolizace v matematice ovlivnila logiku, jejíž síla a obecnost si tak mohla dělat nároky na pozici v základech matematiky.

2.1 Základy matematiky

Co jsou to základy matematiky? Je to něco, co musí být společné všem matematickým teoriím bez ohledu na konkrétní předmět zkoumání? Potřebujeme jednotné a bezpečné základy veškerého vědění?[6]

Prací v matematice se rozumí vedle "počítání" i dokazování tvrzení o matematických objektech. Logika se tak zdá být tím nejvhodnějším kandidátem. Signatura jazyka logiky je prázdná a logika nemá žádné mimologické axiomy, je tak dostatečně obecná při tvorbě deduktivního pozadí usuzování v konkrétních matematických teoriích.

V matematice je zvykem obhospodařovat dvě úrovně. První (nižší) je budovaná teorie a druhou (vyšší) je metaúroveň, kde jsou matematické objekty myšleny "takové, jaké jsou ve 'skutečnosti'". Pak je na tom logika stejně "špatně" jako matematika. Její metaúrovní jsou stejné matematické struktury, jaké používá na metaúrovni i matematika. Z této námitky by se dalo uniknout tím, že si uvědomíme, jaká je role sémantiky v logice.

[6] Postoj, který vyžaduje nalezení jednotných a nezpochybnitelných základů matematiky (resp. veškerého vědění), bývá v anglické literatuře nazýván *foundationalism* a podle Shapira [8] je dnes obecně odmítán. Hledání základů veškerého vědění právě v matematice se objevuje i v koncepci hierarchie věd Augusta Comta (1798–1857).

Mějme nějakou teorii Γ, která vypovídá něco o chování nějakých objektů a nechť $\mathcal{M}_\Gamma$ je třídou modelů této teorie. Konkrétní model je nositelem jedné "představy" o světě, o němž výroky z Γ vypovídají. Výroky mohou být interpretovány třeba jako výroky o přirozených číslech takových, která jsou nám důvěrně známa, nebo to mohou být objekty jiného druhu, u nichž by nás ani nenapadlo hovořit o nich jako o přirozených číslech. Jsou to pouze objekty, které vyhovují podmínkám, jež na ně výroky z Γ kladou. To znamená, že teorie Γ vůbec nemusí být *studiem* konkrétní struktury. Modely tvoří rámec pro *interpretaci* výrazů, distribuují významy.

Množiny a vlastnosti – příklad Teorie množin je považována za silnou matematickou teorii s jednoduchým jazykem (signatura obsahuje pouze binární predikát $\in$).[7] V sémantice predikátové logiky se množiny objevují jako interpretace unárních predikátových symbolů. Máme-li v signatuře příslušného jazyka unární predikátový symbol P a je-li $\mathbf{M} = \langle M, i \rangle$ modelem pro tento jazyk, je P interpretováno jako podmnožina množiny M ($i(P) \subseteq M$). Interpretací P je vymezena množina těch objektů z M, které mají vlastnost P. Interpretace unárních predikátů jsou tedy prvky booleovské struktury dané potencí množiny M. Prvky teorie množin (tj. iterativní množiny) však booleovskou strukturu netvoří.

Jak již bylo řečeno, logika dohnala své zpoždění za matematikou a dnes si nedokážeme odmyslet formální logiku od matematiky. Domníváme se, že diskuse o tom, zda je "primární" logika nebo matematika, jsou poněkud zcestné, pokud si nevyjasníme, co se za slovem "primární" skrývá. Kdybychom považovali logiku za skutečný základ matematiky či veškerého vědění, mohl by někdo namítnout, že tak předpokládáme, že základy matematiky musí být od matematiky v jistém smyslu odděleny a schopny samostatného "života". Přiklonil bych se však spíše k tomu, že základy musí být integrální součástí domu, což rozhodně neznamená, že se tím celá stavba oslabí. Zde je nutno souhlasit se Shapirem, že požadovat absolutně bezpečné základy matematiky není možno. Matematika se tak může jevit jako "stavba na písku". To ale nemusí znamenat nic špatného. ([9], s. 25; viz též dále v textu.)

[7] Příkladem je tzv. *Zermelo-Fraenkelova teorie množin*, která je založena na jazyce predikátové logiky prvního řádu. Objekty, o nichž se hovoří, jsou množiny, tj. i prvky množin jsou množiny. (K tomu viz [11].)

2.1.1 Formalismus

Při *zakládání* matematické teorie[8] se objevují dva dnes běžné přístupy. První se snaží zachytit metateoretický systém pomocí axiomatiky a druhý, který by mohl být nazván "relativním základem", ukazuje, jak lze danou teorii redukovat na teorii jinou. Druhý přístup vyžaduje určitý přehled o obou teoriích. I v případě prvního přístupu je však možno vytvářet axiomatiku jako druhotný produkt po "důkladném" studiu dané oblasti. Tak tomu i v mnoha případech bylo. Na počátku 20. let 20. století zformuloval David Hilbert *program práce v základech matematiky.* Hlavní myšlenkou tohoto programu je budování axiomatických teorií, které budou pomocí přehledné sady axiomů úplně popisovat danou matematickou "teorii" (tj. v podstatě to, co "potkáváme" na metaúrovni).[9] Hilbertův přístup bývá nazýván *formalismem.* Pro něj je typické, že pravdivé jsou ty věty (axiomy), které nejsou ve sporu se svými důsledky. (Viz např. [4], s. 237.) Formalismus je ve svých počátcích budováním formálního systému bez výrazné role sémantiky jako metateorie, jak o tom bude řeč v poslední kapitole. Je známo, že tzv. Hilbertův program není uskutečnitelný. Přehlednou axiomatizaci nelze již pro některé základní matematické teorie požadovat souběžně s jejich úplností.

2.1.2 Logicismus

Můžeme se tedy vrátit k myšlence, že základy matematiky je nutno založit na logice. Tento přístup bývá nazýván *logicismem* a jeho významným představitelem byl již zmiňovaný Gottlob Frege. Cílem je vytvořit systém nezávislý na konkrétní metateorii. Pokud bereme metateorii do úvahy, pak jen jako sémantiku.

Jenomže ani zde nedojdeme klidu. Musíme se stále ptát, co ospravedlní tvrzení, že výrok φ je dokazatelný ze souboru Γ? Vlastně máme vyhráno jen, pokud se spokojíme s tím, že se nám podaří rozložit každý důkaz na posloupnost "evidentních úsudků". To, co považujeme za evidentní, může být značně poznamenáno subjektivním přístupem. Smíříme-li se s tím, že skutečně "věříme" nějaké logice, pak by nám mělo stačit, když si běžný důkaz z učebnice matematiky přeříkáme jako posloupnost úsudků podle pravidel zvolené logiky. ([9], kap. 2.3)

[8] Zde máme na mysli konkrétní matematickou teorii, jakou je např. aritmetika přirozených čísel nebo teorie množin.

[9] Dnes bychom řekli, že budujeme *rekurzivní* a *úplné* teorie. ([10], s. 171) Pozor, zde se slovo *úplný* objevuje v trochu jiném významu, než jsme se s ním doposud setkali. Teď to znamená, že neexistuje sentence v jazyce dané axiomatické teorie, která by nebyla v této teorii ani dokazatelná ani vyvratitelná (tj. dokazatelná její negace).

2.1.3 Intuicionismus

Fregova práce nebyla z počátku vůbec doceněna a stejné či podobné myšlenky se dostávaly do povědomí matematiků až po vydání *Principia Mathematica* (vychází v letech 1910–1913) od Bertranda Russella a Alfreda N. Whiteheada. Sám Hilbertův program byl reakcí na krizi, do které se dostala teorie množin v původní (intuitivní) Cantorově verzi koncem 19. století.

Georg Cantor (1845–1918) má mimořádný podíl na ustanovení teorie množin a zavedení tzv. aktuálního nekonečna do matematické praxe. Jeho pojetí množiny však bylo pouze intuitivní, množina je "souhrn určitých prvků v jeden celek". To vlastně znamenalo, že libovolná vlastnost ϕ, která byla vyjádřitelná v daném jazyce, tvořila onen souhrn objektů, jež mají vlastnost ϕ:

$$\{a \mid \phi(a)\}$$

V takto intuitivně pojímané teori množin se brzy objevily rozpory (antinomie), které vyústily až v tzv. Russellův paradox, a tak ohrozily nejen základní principy teorie množin, ale i matematiky.[10] ([3], [1])

Jak již bylo řečeno, intuitivní pojetí množiny není problematické při práci v nějakém přehledném systému, jakým je např. konkrétní model pro predikátovou logiku, ale ambice *foundationalistů* by tím nemohly být uspokojeny.

Se specifickým řešením přišel *intuicionismus*. Za zakladatele intuicionismu je považován holandský matematik L. E. J. Brouwer, jenž zformuloval základní myšlenky tohoto směru ve své disertaci z roku 1907. Brouwer odmítl aktuální nekonečno a používání aristotelské logiky pro nekonečné objekty. Matematika je pro něj myšlenková činnost, jejímž předmětem jsou abstraktní racionální konstrukce. Tyto konstrukce jsou "existencí" matematických objektů. Konstruováním lze získat i nekonečno jako nějaký nekončící proces (např. neustálé přičítání čísla 1). Zde bychom použili termínu *potenciální nekonečno.*

Konstrukce tak stojí v pozadí odmítnutí jednoho z běžných principů klasické logiky – zákona *vyloučení třetího.*[11] U nekonečných celků může být

[10] Problém byl právě v oné (libovolné) vlastnosti ϕ. Mějme množinu m takových množin, které nejsou prvkem sama sebe, $m = \{x \mid x \notin x\}$. Co potom platí pro m? Když $m \in m$, pak $m \notin m$, a když $m \notin m$, pak $m \in m$. Tedy

$$m \in m \iff m \notin m$$

Podobný problém odhalil Russell i ve Fregově systému.

[11] Je-li A výrok, pak $(A \vee (\neg A))$ je tautologie.

problematické prohlásit, že buď existuje prvek množiny M, který má vlastnost ϕ, nebo tomu tak není, tzn. žádný prvek z M tuto vlastnost nemá.

$$(\exists x \in M)(\phi(x)) \vee (\forall x \in M)(\neg \phi(x))$$

V intuicionistické matematice by to skutečně znamenalo najít (zkonstruovat) takový prvek, nebo ukázat (konstruktivně), že žádný takový prvek v M není.[12]

Brouwer považoval jazyk za nepřesný nástroj přenosu myšlenek. Jde pouze o "vybuzení" volních aktů, takže sdílení matematických idejí se děje na základě jazykově shodných reakcí, čili nejde o společné (a stejné) nahlížení matematických objektů v platónské říši idejí. Protože jazyk není podstatný pro tvorbu myšlenkových konstruktů (matematických objektů), je logika odsouzena jen k úloze naznačovat, jak přejít při usuzování od jednoho kroku k druhému. Je zřetelně vidět, že základy matematiky v duchu *foundationalismu* jsou v případě intuicionismu zcela odmítnuty.

I v době, kdy se již objevují první formální systémy intuicionistické logiky, zdůrazňuje Brouwerův žák Arend Heyting, jaká má být podle intuicionismu skutečná role logiky:

> Die intuitionistische Mathematik ist eine Denktätigkeit, und jede Sprache, auch die formalistische, ist für sie nur Hilfsmittel zur Mitteilung. Es ist prinzipiel unmöglich, ein System von Formeln aufzustellen, das mit der intuitionistischen Mathematik gleichwertig wäre, (...) [2]

2.2 Současná matematika a logika

Ani jeden ze zmiňovaných přístupů v předchozích odstavcích nelze považovat za "prozákladní" v matematice. Současné matematické teorie jsou budovány formalistickým způsobem. Axiomatická metoda vyřešila antinomie v teorii množin, a tak se v jistém smyslu stala základem pro matematické teorie. Souslovím "v jistém smyslu" myslíme to, že je nutno brát ohled právě na konkrétní teorii nebo teorie. O bezpečných základech veškeré matematiky či dokonce lidského vědění nemůže být řeč.[13]

[12]Ilustrací by tu mohl být následující příklad. Ptáme se, zda *existuje posloupnost číslic* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ *v rozvoji čísla* π. Pokud vím, nebyla tato posloupnost dosud nalezena. Nemohu tedy říci, že existuje. Není však ani žádný způsob, jak prokázat, že se ve zmíněném rozvoji nevyskytuje.

[13]V této souvislosti je zajímavá citace Hilbertova textu v [7] (s. 716). Hilbert tu sice zmiňuje "základy vědy", ale neurčitý člen (*a science*) jakoby naznačoval, že těchto věd může být více, že nejde o jeden základ veškerého vědění.

Intuicionismus si v žádném případě nedělal nároky na budování základů matematiky. Jeho východiskem se stala spíše snaha o budování matematiky "jiným způsobem". Filosofie intuicionismu ani nepřipouští jednotné a bezpečné základy celé matematiky. Intuicionistická logika jako formální systém je však v jiném postavení, k té se budou vztahovat i následující poznámky.

O logicismu jsme se zmínili poměrně málo. Díváme-li se na práci v jednotlivých teoriích matematiky jako na deduktivní usuzování, může se logicismus zdát vítězem v soutěži o základy matematiky. Měli bychom však znovu zdůraznit, že v současnosti nemá na poli matematiky a formální logiky smysl o těchto třech směrech hovořit, jako by šlo o soupeřící školy.

Logicismus nám však předkládá stále nevyřešenou otázku, která logika má být "tou pravou". Má být uspořádána volba královny krásy? Myslím, že odpůrci těchto soutěží mohou zůstat úplně klidní, k volbě nedojde. Nevíme, kdo by měl být v porotě, ale hlavně nemáme jasno, které jsou ty pravé přednosti královny krásy. Zde prostě neexistuje přibližování se ideálu. Jediné, co lze učinit, je diskutovat o tom, co má být na logice posuzováno.

Deduktivní systémy a intuicionistická logika – příklad Ke každému souboru formulí Γ daného jazyka lze uvažovat množinu všech důsledků $\mathsf{C}\Gamma = \{\varphi \mid \Gamma \vdash \varphi\}$. Jde o důsledky ve zvoleném deduktivním systému. Pro některé soubory formulí platí, že samy již všechny své důsledky obsahují; těm říkáme *deduktivně uzavřené*, $\Gamma = \mathsf{C}\Gamma$.

Systém deduktivně uzavřených množin tvoří svazovou strukturu nazývanou Heytingova algebra, kde obecně neplatí algebraicky vyjádřený zákon vyloučení třetího. Ten platí, pokud bereme do úvahy pouze tzv. konečně axiomatizované množiny, tj. ty, které lze vyjádřit jako $\mathsf{C}(\varphi)$ pro nějakou sentenci φ. Viz [13].

Předchozí příklad ukazuje, že při práci se strukturou deduktivně uzavřených množin je potřeba uvažovat algebraickou strukturu, kterou lze popsat intuicionistickou výrokovou logikou (ne však logikou klasikou). Příklad berme spíše jako provokaci k následujícím úvahám.

2.2.1 Logika a logiky

Názvem vypůjčeným z knihy [5] chceme naznačit, že přes mnohost různých formálních logik je tu jedna význačná, která je považována za "základní", v jejímž rámci se mnoho matematických úvah odehrává. Tou oslavovanou logikou je *klasická predikátová logika prvního řádu.* Stále bychom mohli vymyslet mnoho otázek, které by zpochybňovaly, proč je to právě tato logika. Asi nejvýznamnější směry tázání jsou následující:

- Neměl by být jiný deduktivní systém?
- Není prvořádový jazyk omezením při práci v matematice?

První otázka má zpochybňovat to, zda je správná volba forem usuzování používaných v matematice. Do této oblasti by patřila např. kritika z pozic intuicionismu a další deduktivní systémy (neklasické logiky) založené na odlišných strukturách usuzování (příkladem jsou substrukturální logiky). Této otázce se nebudeme více věnovat. Protože nás zajímá stávající matematická praxe, zůstaneme u klasické logiky.

Druhá otázka nás tak přivádí k odlišení (klasické) logiky prvního a druhého řádu (příp. řádů vyšších). V podkapitole 1.1 jsme vyjmenovali, jaké symboly používáme. Systémy prvního řádu kvantifikují ve svých formulích pouze přes proměnné, které "zastupují objekty", o nichž se mluví. Druhořádové systémy používají kvantifikaci i přes (mimologické) symboly, které zastupují relace, funkce, vlastnosti apod. Matematika, zejména původně, neoddělovala první a druhý řád. ([7], [9]) V metateorii je běžné používat formule druhořádové logiky. Naše představa metamatematických přirozených čísel s indukcí odpovídá tomu, jak byla aritmetika přirozených čísel původně formulována (a axiomatizována) Giuseppem Peanem (1889).[14] Axiom indukce byl vysloven jako formule druhého řádu:

$$(\forall P)((P(0) \wedge \forall x(P(x) \rightarrow P(x+1)) \rightarrow \forall x(P(x)))$$

V prvořádové axiomatizaci aritmetiky přirozených čísel se indukce objevuje jako schema, které se stane instancí axiomu až po dosazení konkrétní formule prvního řádu φ:

$$(\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1)) \rightarrow \forall x(\varphi(x))$$

Prvořádová axiomatizace nedokáže vyloučit některé modely, které bychom rozhodně nepovažovali za znázornění našich intuitivních přirozených čísel s jejich aritmetikou.

2.2.2 Predikátová logika prvního a druhého řádu

V podkapitole 1.1 jsme uvedli, že tzv. *úplnost* je vlastně shodou dokazatelnosti a "pravdivosti". To znamená, že formule dokazatelné (ze souboru

[14] Viz citaci a poznámku v [10], na str. 186.

sentencí Γ) jsou právě ty, které platí ve všech modelech (tohoto souboru). Pro klasickou predikátovou logiku prvního řádu dokázal úplnost Kurt Gödel v roce 1930. Pro usuzování v matematice to má velký význam, protože mnohé výroky jsou lépe "viditelné" na úrovni metateorie (sémantiky).[15] Pomocí úplnosti lze již snadno dokázat *kompaktnost*, a ta má za důsledek nemožnost *axiomatizovat* (viz 1.1) již některé základní třídy matematických struktur.[16]

Další Gödelův výsledek, jen o rok mladší a známý pod názvem *první věta o neúplnosti*, pohřbil naděje *Hilbertova programu*, jak jsme se o tom zmínili na úplném konci části 2.1.1. Gödel ukázal, že matematické teorie, které mohou "hovořit" o formulích a dokazatelnosti jako o svých objektech, nejsou úplné v tom smyslu, že v jejich jazyce existují nezávislé sentence. Mezi takové teorie patří již aritmetika přirozených čísel a není možné ji zúplnit "přehledným" (konečným) přidáváním axiomů a axiomatických schemat.[17] Je tedy vidět, že na úrovni syntaxe se s tzv. *selfreferenčními* větami nelze nijak jinak vypořádat, než připustit neúplnost teorií v těchto (bohatších) jazycích, kde lze hovořit o dokazatelnosti "v sobě samém".

Zde je třeba si uvědomit, že nejde o nějakou chybu, o něco, co by mělo být napraveno, čemu by bylo potřeba se vyhnout. To ani nelze. Prvořádové teorie mají tyto vlastnosti a jediné, co je potřeba, je vědět o nich. Naopak bychom měli být hrdi na to, že žádný stroj nemůže nahradit práci matematika při dokazování vět v rámci určitých (a to již prvořádových) teoriích. ([10], kap. 6)

Mnozí zastánci logik vyšších řádů "vyčítají" logice prvního řádu tzv. *Skolemův paradox*. V prvořádové logice lze dokázat větu, která říká, že teorie, jež má nejvýše spočetný jazyk (signaturu) a model s libovolně velkou doménou, má již model s doménou nejvýše spočetnou. To platí i pro teorie, které popisují struktury s mnohem větší mohutností. Nejde ovšem o spor. V modelu (na sémantické úrovni) nemusí existovat interpretace některých objektů. ([10], s. 243)

Ani zde se nepokusíme zvolit královnu krásy a je nutno postupovat opa-

[15] Poznamenejme však, že pro běžnou matematickou praxi obvykle postačí *korektnost* (viz 1.1). Využíváme-li metateorii, je to obvykle v roli hledání protipříkladu. Abychom např. prokázali, že φ není dokazatelná v teorii Γ, stačí ukázat, že není sémantickým důsledkem teorie Γ, a k tomu stačí najít model této teorie, kde φ neplatí. Ukazujeme tedy obměněnou implikaci, která je v definici korektnosti.

$$\Gamma \not\models \varphi \quad \Longrightarrow \quad \Gamma \not\vdash \varphi$$

[16] K tomu viz např. [12], kapitola 3.4.

[17] Důsledkem je, že ani predikátová logika druhého řádu nemůže být úplná (vůči standardní sémantice). ([9], kap. 3.3)

trně, abychom nesklouzli do pozic *foundationalismu.* Před okamžikem jsme neformálně uvedli pár vlastností z pokročilých partií predikátové logiky. Některé by mohly být považovány za "slabost" prvořádové logiky (Skolemův paradox), jiné za "nedostatky" logiky druhého řádu (neúplnost). Obě logiky se liší ve svých vyjadřovacích schopnostech, což je výrazné při axiomatizaci některých tříd struktur. Neustále je však nutno mít na paměti, že každá logika je formální systém stejně jako libovolná matematická teorie. To znamená, že je k ní možno přistupovat stejným způsobem. Jediné, co ji činí zvláštním je to, že tvoří rámec pro usuzování v teoriích, které jsou na ní založeny.

3 Metateorie v matematice a logice

Pokud má vůbec smysl hovořit o základech matematiky, pak to musí být základy, které jsou integrální součástí "matematické budovy", kde má formální logika své pevné místo. První věta o neúplnosti je hezkým příkladem toho, jak může být užitečný logický pohled na matematické teorie. Logika, jak jsme ji zavedli na začátku tohoto textu, má tu moc informovat nás o možnostech dedukce, kterou v rámci matematického usuzování používáme.

Již párkrát jsme zdůraznili, že hledání neotřesitelných a bezpečných základů celé matematiky, potažmo veškerého vědění, je nesplnitelný úkol. I když jsme se pokoušeli opatrně propagovat logiku jako "základ", šlo vždy o základ usuzování v rámci (nějaké zvolené) matematické teorie. To je právě tím, čemu rozumíme pod souslovím *integrální součást matematické stavby.* Mělo by se tedy říci, že logika, resp. logiky, tvoří základy "v množném čísle". Matematická praxe je primárně pod vlivem volby formálního systému.

Je třeba odmítnout představu, že základy matematické teorie by musely připomínat jakousi řadu interpretací založenou na explicitně vysvětlujících úrovních.

$$\mathsf{teorie} \quad \longleftarrow \quad \mathsf{metateorie} \quad \longleftarrow \quad \mathsf{metametateorie} \quad \longleftarrow \quad \cdots$$

I když je moderní matematika na explicitním vysvětlení založena, je situace jiná.

Konkrétní matematická teorie Γ je zadána jako soubor formulí v příslušném jazyce. Deduktivní systém (logika) tvoří pozadí pro usuzování a je tedy v jistém smyslu metateorií způsobu práce v teorii Γ. Volba logiky je doprovázena i volbou sémantiky, která určuje obecný rámec interpretace symbolů jazyka teorie Γ. Sémantika je metateorií ve smyslu distribuce významů symbolům jazyka a tvorby třídy struktur (modelů) teorie. V této třídě $\mathcal{M}_\Gamma$

mohou být nějaké význačné struktury, které jsou studovány axiomatickým způsobem, a to třeba i pomocí teorie Γ.

Obrázek naznačuje, že volba logiky určuje možnosti vztahu Γ a $\mathcal{M}_\Gamma$. Matematik si musí být vědom, v rámci jakého formálního systému pracuje. To znamená, že si volí logiku, která mu umožňuje deduktivní práci, při níž je studována např. konkrétní struktura $\mathbf{M}$ z $\mathcal{M}_\Gamma$.

$$\begin{tikzcd}
& \text{jazyk} \arrow[d] & \\
\text{deduktivní systém} \arrow[r] & \Gamma \arrow[d] & \text{sémantika} \arrow[l] \arrow[dl] \\
& \mathcal{M}_\Gamma &
\end{tikzcd}$$

Reference

[1] B. Balcar and P. Štěpánek. *Teorie množin.* Academia, 1986.

[2] A. Heyting. Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. In *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, Math. Kl., pages 42–56. Preussische Akademie der Wissenschaften, Berlin, 1930.

[3] P. Jirků. Intuicionismus. *Filosofický časopis*, 3:494–499, 1970.

[4] V. Kolman. *Logika Gottloba Frega.* Filosofia, 2002.

[5] J. Peregrin. *Logika a logiky.* Academia, 2004.

[6] J. Peregrin. *Kapitoly z analytické filosofie.* Filosofia, 2005.

[7] S. Shapiro. Second-Order Languages and Mathematical Practice. *J. Symbolic Logic*, 50:714–742, 1985.

[8] S. Shapiro. Second-Order Logic, Foundations, and Rules. *The Journal of Philosophy*, 87:234–261, 1990.

[9] S. Shapiro. *Foundations without Foundationalism.* Oxford University Press, 1991.

[10] A. Sochor. *Klasická matematická logika.* Karolinum, 2001.

[11] A. Sochor. *Metamatematika teorií množin.* Karolinum, 2006.

[12] V. Švejdar. *Logika: neúplnost, složitost a nutnost.* Academia, 2002.

[13] A. Tarski. Grundzüge des Systemenkalküls I. *Fundamenta Mathematicae*, 25:503–526, 1935.